

ملاحظة: في أي حلقة تبديلية نعرف المثالية الأولية P (الفعلية) بالشكل:
مهما يكن $x,y \in A$ بحيث أن $xy \in P$ فإنه إما $x \in P$ أو $y \in P$

في حالة الحلقة البوليانية يوجد تكافؤ بين القضيتين:

① I مثالية عظمى.

② I مثالية أولية.

البرهان: ① ⇐ ②: لتكن I مثالية عظمى، وليكن $xy \in I$، ولنفرض جدلاً أن $x \notin I$ و $y \notin I$ ⇐ $x \in C_I$ و $y \in C_I$ و C_I فوق مرشحة
⇐ $xy \in C_I$ وهذا غير ممكن فالفرض الجدلي خاطئ، أي أنه إما $x \in I$ أو $y \in I$
وبالتالي فإن I مثالية أولية.

② ⇐ ①: لتكن I مثالية أولية ولتكن $x \notin I'$ ⇐ $x' \notin I$ لأن
$xx' = 0 \in I$ (حلقة بوليانية) ⇐ (لأن I أولية و $x' \notin I$) ⇐ $x \in I$ ⇐ $x' \in I'$ ⇐ I' فوق مرشحة
⇐ I مثالية عظمى. (وذلك حسب المبرهنة السابقة).

مثال: إذا أخذنا الحلقة البوليانية $D(30)$ حيث منتهية وبالتالي فإن جميع المرشحات والمثاليات تكون رئيسية، وهي تملك ثمانية مرشحات وثمانية مثاليات.

ومنها ثلاثة فوق مرشحات:

$[5,30]$ ، $[3,30]$ ، $[2,30]$

ثلاثة مثاليات عظمى:

$[1,10]$ ، $[1,15]$ ، $[1,6]$

وهذه فوق المرشحات والمثاليات العظمى تكون أولية.
وهذه فوق المرشحات والمثاليات العظمى هي الأوجه الستة للمكعب.

أمثلة:

① لتكن الحلقة البوليانية $P(E)$ حيث E مجموعة غير منتهية:

- إن أسرة المجموعات الجزئية المنتهية من E تكون مثالية في $P(E)$.
- إن أسرة المجموعات الجزئية ذات المتممات المنتهية من E تكون مرشحة في $P(E)$.

البرهان: $A \subseteq B \Rightarrow C_B \subseteq C_A$ ، C_A منتهية ⇒ A ذات متممة منتهية
$\Rightarrow C_B$ منتهية ⇒ B ذات متممة منتهية

A و B ذات متممات منتهية ⇒ C_A , C_B منتهية منتهية ⇒ $C_A \cup C_B$ منتهية ⇒ $C(A \cap B)$
⇒ $A \cap B$ ذات متممة منتهية

- إن أسرة المجموعات الجزئية من E التي تحوي العنصر a تكون مرشحة.

البرهان: A تحوي a و $A \subseteq B$ ⇐ B تحوي a

A تحوي a و B تحوي a ⇐ $A \cap B$ تحوي a

لتكن A لا تحوي a ⇐ C_A تحوي a.

- إن أسرة المجموعات الجزئية من E التي لا تحوي العنصر a تكون مثالية أعظمية.

- نلاحظ أن من المرشحات والمثاليات العظمى من هذا الشكل تكون أساسية مولدة بالعنصر $\{a\}$ (وبالنسبة للمثالية العظمى مولدة $C_{\{a\}}$).

لكن توجد أيضاً بعض من المرشحات التي لا تكون أساسية.

- أسرة المجموعات الجزئية من E ذات المتممات المنتهية تكون مرشحة وهي محتواة في مرشح أعظمي ولتكن U، وهذه من المرشحات U لا تكون أساسية، وذلك لأنه إذا افترضنا جدلاً أن U أساسية مولدة بالعنصر A فإنه من أجل أي عنصر $X \in U$ يكون $A \subseteq X$ ⇐ من أجل مجموعة جزئية X ذات متممة منتهية تكون حاوية A ⇐ من أجل أي مجموعة جزئية منتهية Y تكون ~~[illegible]~~ محتواة في C_A (فإذا افترضنا أن $a \in A$ فإن $\{a\}$ منتهية ولكن $\{a\} \not\subset C_A$).

وهذا تناقض مع الفرض الجدلي الذي فرضناه، أي أن U ليست أساسية.

(2)

لتكن الحلقة البوليانية $F_c(E)$ (أسرة مجموعات جزئية من E المنتهية أو المنتهية المتمم) حيث E غير منتهية.

- أسرة المجموعات المنتهية من مجموعة E تكون مثالية أعظمية.

- أسرة المجموعات ذات المتممات المنتهية من E تكون مرشحة.

بيّن أن المرشحة (أسرة مجموعات الجزئية من E المنتهية المتمم) هي مرشحة أعظمية لتكن $X \in F_c(E)$ ولنفرض أن X لا تنتمي الى أسرة مجموعات الجزئية ذات المتممات المنتهية ⇐ X تنتمي الى أسرة مجموعات الجزئية من E المنتهية وبالتالي فإن C_X تكون ذات متممة منتهية.

أي أن الأسرة السابقة هي مرشح أعظمي.

مرشح كلي

إن المرشحة والمثالية الأعظمية من هذا الشكل لا تكون أساسية لأن $C(E)$ و $F_c(E)$ لأسرة مجموعات الجزئية من E ذات المتممات المنتهية (المنتهية)

مثالية عظمى



- كل حزمة مرشحة من $Fc(E)$ مختلفة عن $C(E)$ تكون أساسية.
- كل حالية أعظمية من $Fc(E)$ مختلفة عن $F(E)$ تكون أساسية.

فإذا كانت الحزمة H حزمة مرشحة بحيث أن $H \neq C(E) \Leftarrow H \not\subseteq C(E)$ (لأن الحزمة مرشحة) $\Leftarrow$ يوجد عنصر مثل $X \in H$ و $X \notin C(E)$.

$\Leftarrow H$ تحوي العنصر X الذي هو مجموعة منتهية أي أن: $X = \{a_1, \dots, a_n\} \in H$

أي أن: $X = \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_n\}$

وبما أن H حزمة مرشحة مطلقة بوليانية حقيقية أولية (من الملاحظة)، أي أنه يوجد $i = 1, \dots, n$ بحيث يكون $\{a_i\} \in H$ وهو وحيد (لأنه لو فرضنا يوجد دليل آخر مثل j بحيث يكون $\{a_j\} \in H$ بحيث $i \neq j \Leftarrow \emptyset = \{a_i\} \cap \{a_j\} \in H$ وهذا غير ممكن لأن H حزمة مرشحة فعلية).

وبالتالي فإن H تكون حزمة أساسية مولدة $\{a_i\}$.

- إذا كان $\{a_i\} \subseteq X$ فإن $X \in H$.
- إذا كان $X \in H$ ولنفرض جدلاً أن $\{a_i\} \not\subseteq X \Leftarrow a_i \notin X \Leftarrow a_i \in CX$
$\Leftarrow \{a_i\} \subseteq CX \Leftarrow X \subseteq C\{a_i\}$، كما أن $C\{a_i\} \in H$ وهذا تناقض لأن:
$\emptyset = \{a_i\} \cap C\{a_i\} \in H$ وهذا غير ممكن وبالتالي فإن $\{a_i\} \subseteq Y$.



الموضوع // المحاضرة السابعة عشر // التاريخ ○○ ٢٠١

③ لتكن الحلقة البوليانية $P(E)$ حيث E فضاء طبولوجي ومن أجل أي عنصر $x \in E$ فإن $\{x\}$ مرشحة في $P(E)$ أي $V(x)$ تكون مرشحة في $P(E)$ وهذا ينتج مباشرة من تعريف المجاورة.

من المعروف أن النقطة x تكون منعزلة إذا كانت $\{x\}$ مجاورة للنقطة x ومنه نستنتج ما يلي:
حتى تكون $V(x)$ مولد مرشحة يلزم ويكفي أن تكون x منعزلة

- إذا كانت x منعزلة وإذا كان $A \notin V(x)$ فإن $x \notin A$ (x منعزلة) $\Leftarrow x \in C_A \Leftarrow$
ومنه ينتج أن $C_A \in V(x)$ حيث مولد مرشحة.

- إذا كانت $V(x)$ مولد مرشحة لنفرض جدلاً أن x ليست منعزلة $\Leftarrow \{x\} \notin V(x)$
$\Leftarrow C_{\{x\}} \in V(x)$ وهذا تناقض (لأنه لا يمكن لمجموعة لا تحوي العنصر x أن تكون مجاورة له).
ومنه ينتج أن x منعزلة.

- المورفيزمات والمثاليات والمرشحات:

لتكن A ، B حلقتين بوليانيتين ، f مورفيزم بولياني من A إلى B.

- مبرهنة:

① إذا كانت F مرشحة في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A.

② إذا كانت I مثالية في B فإن $f^{-1}(I)$ تكون مثالية في A.

- البرهان:

① • بما أن $f(1) = 1 \in F \Leftarrow 1 \in f^{-1}(F)$ (f مورفيزم بولياني)

• نفرض أن $x \in f^{-1}(F)$ و $y \geq x \Leftarrow f(x) \in F$ ، $f(y) \geq f(x)$ ، F مرشحة
$\Leftarrow f(y) \in F \Leftarrow y \in f^{-1}(F)$

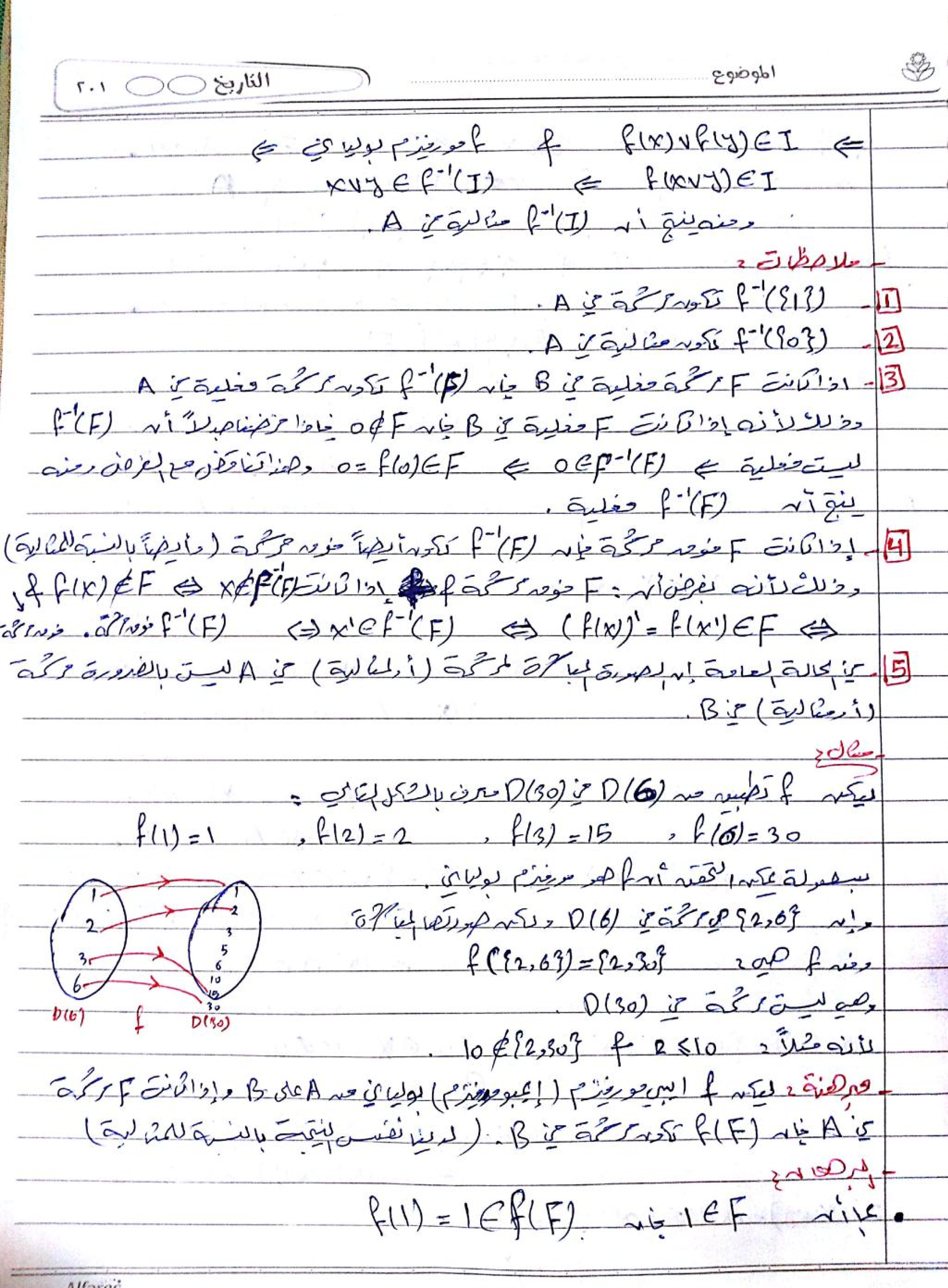
• ليكن $x, y \in f^{-1}(F) \Leftarrow f(x), f(y) \in F$ ، F مرشحة $\Leftarrow$
$f(x)f(y) \in F$ ، f مورفيزم بولياني.
$f(xy) \in F \Leftarrow xy \in f^{-1}(F)$
ومنه ينتج أن $f^{-1}(F)$ مرشحة.

② بما أن $f(0) = 0 \in I \Leftarrow 0 \in f^{-1}(I)$

• نفرض أن $x \in f^{-1}(I)$ ، $y \leq x \Leftarrow f(x) \in I$ ، $f(y) \leq f(x)$ ، I مثالية
$\Leftarrow f(y) \in I \Leftarrow y \in f^{-1}(I)$

• نفرض أن $x, y \in f^{-1}(I) \Leftarrow f(x), f(y) \in I$ ، I مثالية

Alfares



$\Leftarrow$ f هومومورفيزم بولياني $\Leftarrow$ $f(x)\vee f(y)\in I$ $\Leftarrow$

$x\vee y\in f^{-1}(I) \Leftarrow f(x\vee y)\in I$

ومنه ينتج أن $f^{-1}(I)$ مثالية في A.

- ملاحظات:

1- $f^{-1}(\{1\})$ تكون مرشحة في A.

2- $f^{-1}(\{0\})$ تكون مثالية في A.

3- إذا كانت F مرشحة فعلية في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون مرشحة فعلية في A وذلك لأنه إذا كانت F فعلية في B فإن $0\notin F$ فإذا افترضنا جدلاً أن $f^{-1}(F)$ ليست فعلية $\Leftarrow$ $0\in f^{-1}(F)$ $\Leftarrow$ $0=f(0)\in F$ وهذا تناقض مع الفرض ومنه ينتج أن $f^{-1}(F)$ فعلية.

4- إذا كانت F عظمى مرشحة فإن $f^{-1}(F)$ تكون أيضاً عظمى مرشحة (وأيضاً بالنسبة للمثالية) وذلك لأنه بفرض أن: F عظمى مرشحة إذا كانت $x\notin f^{-1}(F) \Leftrightarrow f(x)\notin F$ $\Leftrightarrow (f(x))'=f(x')\in F \Leftrightarrow x'\in f^{-1}(F) \Leftrightarrow$ $f^{-1}(F)$ عظمى مرشحة.

5- في الحالة العامة إن الصورة المباشرة لمرشحة (أو المثالية) في A ليست بالضرورة مرشحة (أو مثالية) في B.

- مثال:

ليكن f تطبيق من D(6) في D(30) معرف بالشكل التالي:

$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=15$, $f(6)=30$

بسهولة يمكن التحقق أن f هو هومومورفيزم بولياني.

وإن $\{2,6\}$ هي مرشحة في D(6) ولكن صورتها المباشرة وفق f هي: $f(\{2,6\})=\{2,30\}$

وهي ليست مرشحة في D(30).

لأنه مثلاً: $2\leq 10$ و $10\notin\{2,30\}$.

- مبرهنة: ليكن f ايبيمورفيزم (إبيمورفيزم) بولياني من A على B وإذا كانت F مرشحة في A فإن f(F) تكون مرشحة في B. (لدينا نفس النتيجة بالنسبة للمثالية)

- البرهان:

• بما أن $1\in F$ فإن $f(1)=1\in f(F)$.

• نفرض أن $x \in f(F)$ و $y \geq x$ ⇐ يوجد عنصر حيث $x \in F$
و $y \in A$ بحيث يكون $x = f(x)$ و $y = f(y)$ (لإيجاد النظير)
$$y = y \vee x = f(y) \vee f(x) = f(y \vee x) \in f(F)$$
(لأن $x \in F$ و $x \leq y \vee x$ و F مرشح فإن $y \vee x \in F$)

• نفرض أن $x, y \in f(F)$ ⇐ يوجد $x, y \in F$ بحيث يكون $f(x) = x$ و $f(y) = y$
$$xy = f(x) f(y) = f(xy) \in f(F)$$
$\in F$

وبالتالي فإن $f(F)$ مرشحة في B.

- نظرية تمثيل ستون :

- لتكن A حلقة بوليانية ولتكن X مجموعة جميع المرشحات في A، ليكن α تطبيق من A في $\wp(X)$ معرف بالشكل التالي :
نفرض أن $x \in A$ فإن : $\alpha(x) = \{u \in X ; x \in u\}$

- نظرية ستون :
كل حلقة بوليانية تكون إيزومورفية مع أسرة مجموعات وبشكل أدق إن α يكون مونومورفيزم بولياني من A في $\wp(X)$.

البرهان :
إن التطبيق $\alpha : A \to \wp(X)$ المعرف بالشكل $x \to \{u_i \in X ; x \in u_i\}$

• وليكن $x, y \in A$ فإن :
$$\alpha(xy) = \{u_i \in X ; xy \in u_i\} = \{u_i \in X ; x \in u_i \text{ \& } y \in u_i\}$$
$$= \{u_i \in X ; x \in u_i\} \text{ \& } \{u_i \in X ; y \in u_i\}$$
$$= \alpha(x) \cap \alpha(y)$$

• لتكن $x \in A$ فإن :
$$\alpha(x') = \{u_i \in X ; x' \in u_i\} = \{u_i \in X ; x \notin u_i\}$$
$$= C\{u_i \in X ; x \in u_i\} = C\alpha(x)$$

ومنه ينتج أن α هومومورفيزم بولياني.

• نفرض أن $\alpha(x) = \alpha(y)$ ⇐

هومومورفيزم بولياني
$$\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) = \emptyset$$
العنصر الأصغر

التاريخ ٢٠١   الموضوع

$(f(x))' = f(x')$ هومومورفيزم بولياني

⇐ $(\alpha(x+y))' = X$ ⇐ $\alpha(x+y)' = X$ ⇐ $(x+y)'$ ينتمي الى جميع عناصر [illegible]

⇐ $(x+y)' = 1$ ⇐ $x+y=0$ ⇐ $x=y$.

وبالتالي فإن A تكون إيزومورفية مع $\alpha(A)$ والتي هي حلقة بوليانية جزئية من $\wp(X)$.

ندعو α (أو α_A إذا لزم التوضيح) إيزومورفيزم ستون .

- ملاحظات :

نظرية ستون للعناصر بطرق متكافئة :

- يمكن أن نأخذ X_1 مجموعة المثاليات العظمى (أو الأولية) في A ، ونعرف α_1 بالشكل :

$$\alpha_1(x) = \{I \in X_1 ; x \notin I\}$$

إن α_1 يكون مونومورفيزم بولياني من A في $\wp(X_1)$.

- لنأخذ X_2 مجموعة الهومومورفيزمات البوليانية من A في $U = \{0,1\}$ ، ولنعرف α_2 بالشكل :

$$\alpha_2(x) = \{f \in X_2 ; f(x) = 1\}$$

فإن α_2 يكون مونومورفيزم بولياني من A في $\wp(X_2)$.

- في الحالة التي تكون فيها الحلقة [illegible] A منتهية فإن α يحقق خواص إضافية .

- مبرهنة :

إذا كانت A حلقة بوليانية منتهية فإن α يكون غامراً أي أن A تكون إيزومورفية مع $\wp(X)$.

- البرهان : لتكن A منتهية وبالتالي فإن X تكون أيضاً منتهية ، لتكن $Y \in \wp(X)$.

يفرض الحالتين : اذا كانت $Y = \emptyset$ فإن $Y = \alpha(0)$

اذا كانت $Y \neq \emptyset$ يمكن أن نفرض أن $Y = \{u_1, u_2, ---, u_k\}$ ولدينا :

$F = u_1 \cap u_2 \cap - \cap u_k$ تكون مرشحة في A وبالتالي فهي أساسية (لأن A منتهية) ولنفرض أن $F = A \vee a$ (أي $F = F_a$ ، $a \in A$) (لأن كل مرشح يكون مولد بعنصر منها)

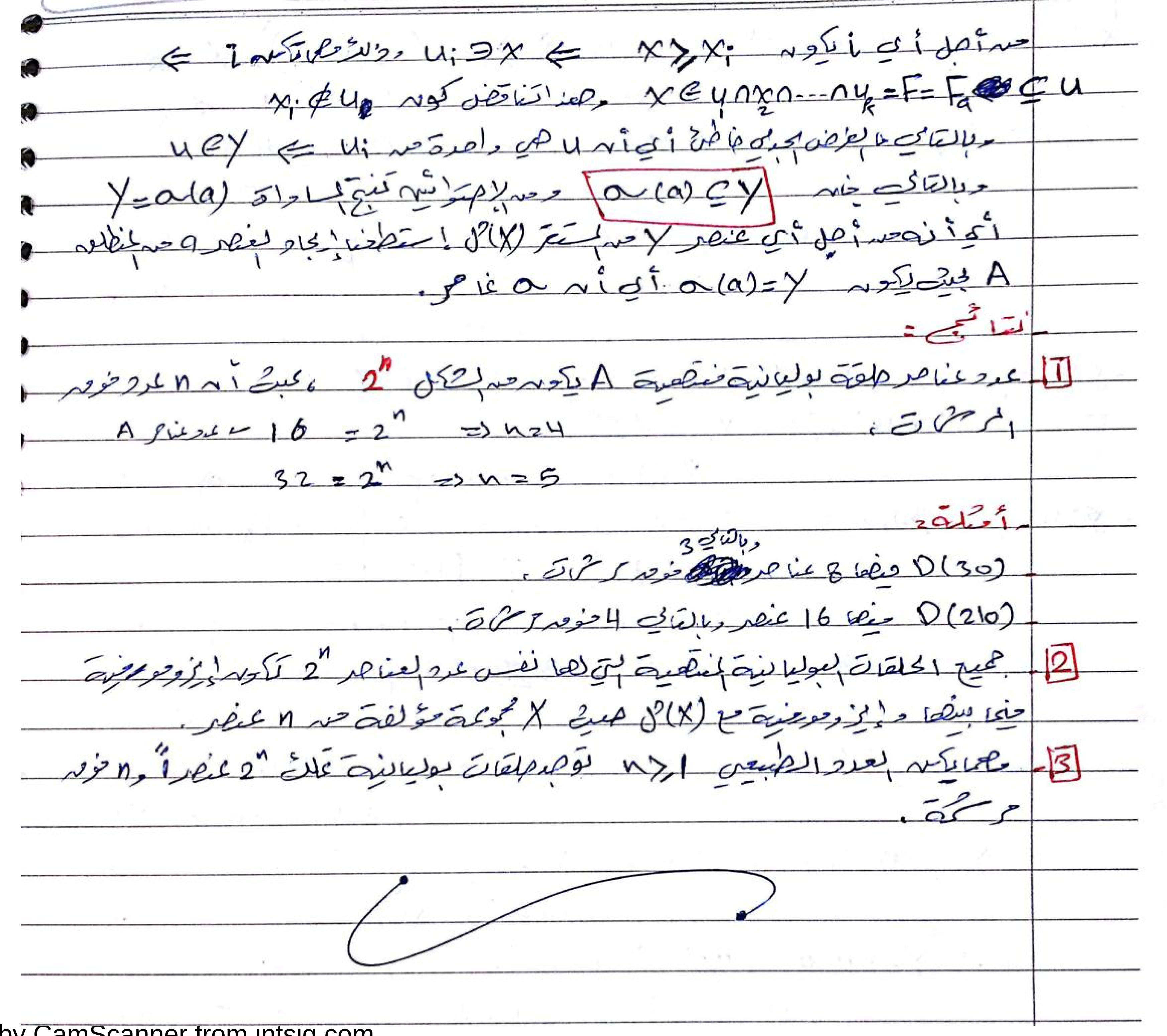
• $\forall u_i \in Y$ ⇐ $F \subseteq u_i$ ⇐ $a \in F \subseteq u_i$ ⇐ $a \in u_i$ وذلك من أجل أي i

⇐ $u_i \in \alpha(a)$ وذلك من أجل أي i ومنه نستنتج أن $Y \subseteq \alpha(a)$

• لتكن $u \in \alpha(a)$ ⇐ $a \in u$ ⇐ $F_a = F \subseteq u$ ، لنفرض أن $u \neq u_i$; $i = 1, --, k$

$u_i \not\subseteq u$ (لأن u_i أعظمية أو مرشح أعظمي) إذاً من أجل أي i يوجد $i = 1, --, k$

يوجد $x_i \in u_i$ و $x_i \notin u$ ، لنفرض أن : $x = x_1 \vee x_2 \vee -- \vee x_k$



من أجل أي i يكون $x \geq x_i$ ⇐ $x \ni u_i$ وذلك من أجل كل i ⇐

$x \in y_1 \cap y_2 \cap \dots \cap y_k = F = F_a \subseteq u$ وهذا تناقض كون $x_i \notin u_i$

وبالتالي ما فرضناه خاطئ أي أن u هي واحدة من u_i ⇐ $u \in Y$

وبالتالي فإن $\alpha(a) \subseteq Y$ ومن الاحتوائين ينتج المساواة $Y = \alpha(a)$

أي أنه من أجل أي عنصر Y من المستقر $P(X)$ استطعنا إيجاد العنصر a من المنطلق A بحيث يكون $\alpha(a) = Y$ أي أن α غامر.

- نتائج:

1- عدد عناصر حلقة بوليانية منتهية A يكون من الشكل 2^n ، حيث أن n عدد عناصر الذرات؛

$16 = 2^n \Rightarrow n = 4$ عدد عناصر A

$32 = 2^n \Rightarrow n = 5$

- أمثلة:

- $D(30)$ فيها 8 عناصر وبالتالي 3 عناصر ذرات.
- $D(210)$ فيها 16 عنصر وبالتالي 4 عناصر ذرية.

2- جميع الحلقات البوليانية المنتهية التي لها نفس عدد العناصر 2^n تكون إيزومورفية فيما بينها وإيزومورفية مع $P(X)$ حيث X مجموعة مؤلفة من n عنصر.

3- مهما يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$ توجد حلقات بوليانية تملك 2^n عنصراً و n عنصر ذري.